Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Michele Serra
Wintersemester 2019/2020

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 14

Dieses Übungsblatt deckt den Stoff der Vorlesungen 26 und 27 ab. Es soll nicht abgegeben werden und wird auch in den Übungsgruppen nicht besprochen. In der Plenumsübung am 11.02.2020 gibt es die Gelegenheit, einige der Aufgaben zu diskutieren.

Aufgabe 14.1

Sei K ein Körper, $a, b \in K$ und f ein lineares Funktional auf K^2 gegeben durch $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. Zu jedem der folgenden linearen Operatoren T sei $g = T^t(f)$. Bestimmen Sie $g(x_1, x_2)$.

(a) $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

(b) $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$

(c) $T(x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

Aufgabe 14.2

Ist K ein Körper und $A \in Mat_{n\times n}(K)$, so heißt die durch $(A^t)_{ij} := A_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ definierte Matrix $A^t \in Mat_{n\times n}(K)$ die *zu A transponierte Matrix*. Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn A^t invertierbar ist und das in diesem Fall $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ gilt.

Aufgabe 14.3

Entscheiden Sie für jede der folgenden Wahlen eines Körpers K, zweier K-Vektorräume V_1 und V_2 sowie zweier Unterräume U_1 von V_1 bzw. U_2 von V_2, ob $V_1/U_1 \cong V_2/U_2$. Beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $K = \mathbb{R}$, $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{(x, 0)^t : x \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(0, x)^t : x \in \mathbb{R}\}$.

(b) $K = \mathbb{Q}$, $V_1 = \mathbb{Q}^4$, $V_2 = \mathbb{Q}^2$, $U_1 = \{(a, -a + b, b, 2a + b)^t : a, b \in \mathbb{Q}\}$, $U_2 = \{0\}$.

(c) K beliebig, $n \in \mathbb{N}$, $V_1 = V_2 = K^{n\times n}$, $U_1 = \{A \in V_1 : (\forall i, j \in \mathbb{N})(A)_{ij} = (A)_{ji}\}$, $U_2 = \{A \in V_2 : (\forall i, j \in \mathbb{N})(A)_{ij} = (A)_{(n+1-i)j}\}$.

Aufgabe 14.4

Entscheide für jede der folgenden Wahlen eines Körpers K, eines K-Vektorraumes V, eines Unterraumes U von V sowie zweier Elemente $v, w \in V$, ob $v \in w + U$: Beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{Q}$, $v = \sqrt{2}$, $w = 3$

(b) K beliebig, $n \in \mathbb{N}$, $V = K^{n\times n}$, $U = \{A \in V : \forall 1 \leq i, j \leq n((A)_{ij} = (A)_{ji})\}$, $v = I_n$, $w \in K^{n\times n}$ gegeben durch $(w)_{ij} = 1$ für $i + j = n + 1$ und $(w)_{ij} = 0$, sonst.

(c) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathrm{Fkt}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $U = \{f \in V : \exists c \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}(-c < f(x) < c)\}$, $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $v(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $w(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Hierbei bezeichnet $\mathrm{Fkt}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.